Colle de Physique

25/11/2011 - Semaine 8

Exercice

Question préliminaire

Déterminer l'expression et indiquer le signe de la variation d'entropie d'une mole de gaz parfait dont le volume augmente de façon isotherme.

Questions

On cnsidère un fil en caoutchouc, dont les paramètres therodynamiques sont sa longueur L, la tension F à laquelle il est soumis et sa température T. On peut linéariser l'équation d'état autour de $T_m$et F_m:

$$F(L,T) = F_m + \rho(L - L_m) + \sigma(T - T_m)$$

où ρ et σ sont des constantes positives.

1. Exprimer le travail élémentaire reçu pquand le fil s'allonge de dL lors d'une transformation réversible.
2. On note C_L la capacité calorifique (supposé indépendante de la tempéraure) du fil à longueur constante, on a alors que la chaleur reçue lors d'une transformation élémentaire $\delta Q = C_L dT + h dL$, h étant fonction de T et L. Exprimer h en fonction de T et σ.
3. Montrer que C_L ne dépends pas de L.
4. Donner l'expression de l'entropie du fil, notée $S(T, L)$.
5. On tire sur le fil de façon isotherme, Quel est le signe de la variation d'entropie ?

Correction

Question préliminaire

Soit un gaz parfait et lors d'une transformation réversible, on a par définition : $dS = \frac{\delta Q_{échangé}}{T} = \frac{dU - \delta W_{rev}}{T}$, d'où $dS = c_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV$.
D'après l'équation des gazs parfait : $\frac{P}{T} = \frac{R}{V}$, d'où $dS = c_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}$. Pour une transformatio isotherme, on a donc :

$$\Delta S = R \ln(\frac{V}{V_0})$$

On a donc $\Delta S > 0$ si $V > V_0$.

Questions

1. $\delta W = FdL$

2. Considérons une transformation réversible, on a donc d'après le second principe de la thermodynamique : $dS = \frac{\delta Q_{échangé}}{T}$, d'où $dS = c_L \frac{dT}{T} + \frac{h}{T} dL$.
On en déduit donc $\frac{h}{T} = \frac{\delta S}{\delta L}_T$.
Considérons l'énergie libre : $\mathcal{F} = U - TS$, du le premier principe on déduit : $d\mathcal{F} = -SdT + FdL$. $\mathcal{F}$ étant une fonction d'état, d'après l'égalité de Schwartz : $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta T} = -\frac{\delta S}{\delta L} = -\frac{h}{T}$. Or d'apèrs l'équation d'état : $dF = \rho dL + \sigma dT$, d'où $\frac{\delta F}{\delta L}_T = \sigma$, on a donc $h = -\sigma T$.

3. D'après le second principe $dS = c_V \frac{dT}{T} + \frac{h}{T} dL$, d'après légalité de Shwartz, on déduit : $\frac{\delta(\frac{c_L}{T})}{\delta T} = \frac{\delta(\frac{h}{T})}{\delta T} = -\frac{\delta \sigma}{\delta T}$, or σ est une constante, et T est indépendante de L, d'où $\frac{1}{T}\frac{\delta c_L}{\delta L} = \frac{\delta c_L}{\delta L} = 0$. Donc c_L est indépendante de L.

4. Considérons une transformation réversible de l'état L_m, T_m à l'état L, T :

$$dS = c_L \frac{\delta T}{T} + \frac{h}{T} dL$$

$$dS = c_L \frac{\delta T}{T} - \sigma \delta L$$

$$S(T, L) - S(T_m, L_m) = c_l \ln(\frac{T}{T_m}) - \sigma(L - L_m)$$

$$S(T, L) = S_m + c_L \ln(\frac{T}{T_m}) - \sigma(L - L_m)$$

5. A T fixé, $\delta T = 0$. On tire sur le fil, c'està dire $dL > 0$, $dS = -\sigma dL$, avec σ positif. Donc $dS < 0$: la variation d'entropie est négative.