λ-Calcul et Logique Informatique

Guillaume Bury
bury@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Système $\mathcal{D}$ (types intersection)
On considère le système de types suivant :

$$\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma, x : T \vdash M : T'}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \to T'} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T \to T' \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M\ N : T'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \quad \Gamma \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2}{\Gamma \vdash M : T_i}$$

1. Pour chacun des termes suivants, donner un type que ce terme admet dans le système $\mathcal{D}$: $\lambda x.\ x\ x$, $\lambda x \lambda y.\ x\ (y\ x)$, $(\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda y.\ y)$.
2. Quelle est la différence avec les règles de la conjonction/paire ? Quel sens ce système peut-il avoir dans le contexte du typage des langages de programmations ?
3. Parmi les types suivants, donner un terme pour ceux qui sont habités (on ne tentera pas de prouver qu'un type n'est pas habité) :
   — $((\alpha \cap \beta) \to \tau) \to \alpha \to \beta \to \tau$
   — $(\alpha \to \beta \to \tau) \to (\alpha \cap \beta) \to \tau$
   — $((\tau \to \alpha) \cap (\tau \to \beta)) \to \tau \to (\alpha \cap \beta)$
   — $(\tau \to (\alpha \cap \beta)) \to ((\tau \to \alpha) \cap (\tau \to \beta))$
4. Proposer une définition pour $\mathrm{Red}_{T \cap T'}$ et montrer que tout terme typable dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant.
5. Montrer que pour tout terme u en forme normale il existe Γ et T tels que $\Gamma \vdash u : T$. Indice : on a vu une façon pratique d'écrire une forme normale.
6. Montrer que tout terme fortement normalisant est typable dans $\mathcal{D}$.

Exercice 2 — Système $\mathcal{D}_\omega$
On étend le système $\mathcal{D}$ en ajoutant un type atomique spécial noté Ω, et la règle de typage suivante :

$$\overline{\Gamma \vdash M : \Omega}$$

1. Donner un terme typable dans $\mathcal{D}_\omega$ mais pas dans $\mathcal{D}$. En termes calculatoires, quelle propriété de typage a-t-on perdu ? nous reste-t-il quelque-chose d'intéressant ?
2. Montrer que $u \to u'$ et $\Gamma \vdash u' : T$ implique $\Gamma \vdash u : T$.
3. Montrer que tout terme faiblement normalisant est typable dans $\mathcal{D}_\omega$ par un type sans Ω.

   On va voir que la réciproque est vraie si on se restreint aux "bons" types. Pour cela, posons quelques définitions. Un ensemble $\mathcal{X}$ est dit *saturé* si

   $$u[x := t]\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X} \ \text{ implique } \ (\lambda x.\ u)\ t\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X}$$

   Pour $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \Lambda$, on définit

   $$\mathcal{X} \to \mathcal{Y} := \{\ u \in \Lambda \mid (u\ v) \in \mathcal{Y} \text{ pour tout } v \in \mathcal{X}\ \}$$

   Finalement, étant donnée une interprétation $\mathcal{I}$ qui à tout type de base α associe un ensemble saturé $|\alpha|_\mathcal{I}$, on l'etend aux types comme suit :

   $$|\Omega|_\mathcal{I} = \Lambda \qquad |T \cap T'|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I} \cap |T'|_\mathcal{I} \qquad |T \to T'|_\mathcal{I} = |T|_\mathcal{I} \to |T'|_\mathcal{I}$$

4. Montrer que $|T|_\mathcal{I}$ est saturé pour tout T.
5. Montrer que $x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash u : T$ et $t_i \in |T_i|_\mathcal{I}$ pour tout i impliquent $u[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \in |T|_\mathcal{I}$.

   On dit que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ est une *paire adéquate* si $\mathcal{N}$ est saturé, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_0 \to \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$.
   On dit que Ω apparaît positivement (resp. négativement) dans un type T s'il apparaît à gauche d'un nombre pair (resp. impair) d'implications. Par exemple, Ω apparaît uniquement positivement dans Ω et $(\Omega \to \alpha) \to \alpha$ et il apparaît uniquement négativement dans $\alpha \to (\Omega \cap \beta) \to \gamma$.

6. Soit $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ une paire adéquate et $\mathcal{I}$ une interprétation telle que pour tout α on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$. Montrer alors que pour tout T sans occurrence positive (resp. négative) de Ω on a $|T|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_\mathcal{I}$).
7. Montrer qu'on a une paire adéquate si l'on prend $\mathcal{N}$ l'ensemble des termes qui normalisent selon la stratégie externe gauche et $\mathcal{N}_0$ l'ensemble des termes $(x\ t_1 \dots t_n)$ avec x une variable et chaque $t_i \in \mathcal{N}$.
8. Soit $\cdot \vdash u : T$ avec T sans occurrence positive de Ω. Montrer que u normalise faiblement.