

Colle de Physique

December 9, 2011

Exercice

On considère l'atmosphère terrestre comme un milieu dont les propriétés sont celles du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-19} F.m^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$. Un élément de courant $i(t)dz\vec{e}_z$ placé à l'origine O de l'espace, le long de l'axe (O, \vec{e}_z) , crée en un point $M(r, \theta, \phi)$ un potentiel de vecteur :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 i(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} dz\vec{e}_z$$

1. Le courant $i(t)$ est sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I . Donner, en notation complexe l'expression de $d\vec{A}$ en fonction du nombre d'onde k .
2. On suppose $r \gg \lambda$. Pourquoi peut-on négliger les termes résultants du facteur $\frac{1}{r}$ devant ceux résultant de l'exponentielle, lors d'une dérivation spatiale de $d\vec{A}$?
3. Identifier parmi les deux expressions suivantes le champ $d\vec{B}$ et $d\vec{E}$ en un point M :

$$j\omega \frac{\mu_0 I e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r} \sin\theta dz\vec{e}_z \quad jk \frac{I e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \sin\theta dz\vec{e}_\phi$$

4. Quelle est la structure localement du champ $(d\vec{E}, d\vec{B})$?
5. Une antenne demi-onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \frac{\lambda}{2}$, colinéaire à l'axe (O, \vec{e}_z) et de point milieu O l'origine. Celui-ci est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω et nul aux extrémités de l'antenne. Exprimer le courant dans l'antenne en notation complexe.
6. On considère un élément de courant $i(z, t)dz\vec{e}_z$ au point N de l'antenne, à la cote z . Exprimer en fonction de z, θ la différence de marche δ entre les ondes rayonnées en N et en O dans la direction (θ, ϕ) .
7. Déterminer en notation complexe l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ rayonné par l'antenne en M dans la direction (θ, ϕ) . On donne le résultat mathématique suivant :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{j a x} dx = \frac{2 \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{1 - a^2}$$

8. En déduire que le champ électrique cherché est :

$$\vec{E}(M, t) = -c \frac{\mu_0 I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

9. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ rayonné par l'antenne.