

λ-calcul et logique informatique

bury@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Stratégie interne faible

La stratégie interne faible, aussi appelée *appel par valeur*, est aussi proche que possible des langages de programmation traditionnels. Elle ne réduit jamais sous les abstractions, et ne réduit un β -redex que lorsque son argument est déjà complètement réduit — on dit alors que c'est une *valeur*.

On définit l'ensemble des valeurs V par la grammaire suivante, où \mathcal{V} est l'ensemble des variables et Λ l'ensemble de tous les termes :

$$V := \mathcal{V}V \dots V \mid \lambda x. \Lambda$$

On définit formellement notre stratégie comme suit :

$$\frac{v \in V}{(\lambda x. u)v \triangleright u[x := v]} \quad \frac{u \triangleright u'}{uv \triangleright u'v} \quad \frac{u \in V \quad v \triangleright v'}{uv \triangleright uv'}$$

1. Utiliser le combinateur Y pour définir la fonction factorielle, de sorte que **fact** $\bar{n} \rightarrow_{\beta}^* \bar{n}!$. On rappelle la définition :

$$Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

2. Quelles sont les réductions de **fact** (sans argument) par \triangleright^* ? Cela pose-t-il problème? Si oui, proposer une solution.
3. Quelles sont les réductions de **fact** $\bar{0}$ par \triangleright^* ? Cela pose-t-il problème? Si oui, proposer une solution.

Exercice 2 — Combinateurs

On définit \mathcal{C} le calcul de combinateurs **SK** : les termes sont construits suivant la grammaire

$$M := \mathcal{V} \mid (M M) \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{K}$$

et la réduction est plus petite congruence contenant

$$\mathbf{K} M N \rightarrow M \quad \mathbf{S} M N P \rightarrow (M P) (N P)$$

1. On pose $\mathbf{I} := \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{K}$. Réduire $\mathbf{I} M$ pour un terme M quelconque.
2. Construire une traduction de \mathcal{C} dans Λ tel que $M \rightarrow N$ implique $[M]_{\mathcal{C}} \rightarrow_{\beta} [N]_{\mathcal{C}}$ pour tous $M, N \in \mathcal{C}$.
3. Définir une construction λ^* , prenant une variable et un terme de \mathcal{C} et renvoyant un nouveau terme de \mathcal{C} de sorte que $\lambda^*(x, M)N \rightarrow^* M[x := N]$ pour tout N . On procédera par induction sur M , en commençant par les variables, et en utilisant le "distributeur" \mathbf{S} pour l'application.

4. A-t-on $\mathbf{K} \leftrightarrow^* \lambda^*(x, \lambda^*(y, x))$?
5. Définir une traduction de Λ dans \mathcal{C} telle que
 - $u \triangleright v$ implique $[u]_\Lambda \rightarrow^* [v]_\Lambda$.
 - pour tout lambda-terme u , u est β -équivalent à $[[u]_\Lambda]_{\mathcal{C}}$

Exercice 3 — Autour de l'équivalence comportementale

Un contexte est un λ -terme avec un trou, qu'on représentera par un terme spécial \square . L'opération de mise en contexte $C[u]$ est définie comme le remplacement *textuel* de ce trou par le terme u : contrairement à la substitution $C[\square := u]$, il est important que ce remplacement provoque la capture des variables libres de u . Par exemple, si $C = (\lambda x. \square)$ et $C' = (\lambda y. \square)$ alors $C[x] = (\lambda x. x)$ est un terme différent de $C'[x] = (\lambda y. x)$.

Un contexte ne contient pas forcément un unique trou : on peut avoir $C[u] = u u$ pour tout u (deux trous), et aussi $C[u] = v$ pour tout u (aucun trou). On peut enfin naturellement généraliser la notion de contexte à plusieurs arguments, pour parler de contextes comme $C[u][v] = u (u v)$ pour tout u et v .

Pour faciliter le raisonnement sur les réductions de termes en contexte, nous admettrons le résultat suivant : Soient u_1, \dots, u_n des termes clos et C un contexte n -aire tel que $C[\vec{u}] \rightarrow v$. Alors on a :

- (1) La réduction est dans C : v peut s'écrire $C'[\vec{u}]$ tel que pour tous termes \vec{t} clos on a $C[\vec{t}] \rightarrow C'[\vec{t}]$.
- ou (2) La réduction est dans un certain u_i : $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i]$ pour tout \vec{t} , et $v = C'[\vec{u}, u']$ avec $u_i \rightarrow u'$.
- ou (3) La réduction implique C et un u_i : $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i w]$ pour tout \vec{t} , $u_i = (\lambda x. u')$ et $v = C'[\vec{u}, u'[x := w]]$.

On dit que deux termes u et v sont *séparables* s'il existe un contexte C tel que $C[u] \rightarrow^* T$ et $C[v] \rightarrow^* F$.

1. Montrer que la séparabilité est une relation irreflexive et symétrique.
2. Montrer que $(\lambda f \lambda x. f x)$ et $(\lambda f \lambda x. f (f x))$ sont séparables.
3. Montrer que si $C[\Omega] \rightarrow^* t$ avec t en forme normale, alors pour tout u clos on a aussi $C[u] \rightarrow^* t$.
En déduire que I et Ω sont inséparables.

On écrit $u \downarrow_\beta$ quand u normalise faiblement pour la β -réduction, i.e., $u \rightarrow^* t$ avec t sans β -redex. On dit que u et v sont en *équivalence comportementale*, noté $u \approx v$, si pour tout contexte C on a $C[u] \downarrow_\beta$ ssi $C[v] \downarrow_\beta$. De façon évidente, \approx est une relation d'équivalence et une congruence, et deux termes α -équivalents sont en équivalence comportementale.

4. Montrer que \rightarrow est contenue dans \approx .
5. Soient u, v tels que $u \rightarrow^* \lambda x. v$. Montrer $u \approx (\lambda y. u y)$ pour $y \notin \text{FV}(u)$.
6. Montrer que si v n'est pas résoluble alors, pour toute substitution θ , $v\theta$ n'est pas résoluble.
7. Démontrer $u \not\approx v$ pour u résoluble et v non résoluble.
8. On montre finalement que l'équivalence comportementale est strictement incluse dans l'inséparabilité :
 - (a) Donner deux termes t et t' inséparables mais tels que $t \not\approx t'$.

- (b) Montrer que si u et v sont séparables alors ils ne sont pas en équivalence comportementale.

Exercice 4 — Réflexifs

Soit un espace réflexif (D, i, r) , *i.e.*, on a $i : D \rightarrow [D \rightarrow D]$ et $r : [D \rightarrow D] \rightarrow D$ tels que $i \circ r = \text{id}_{[D \rightarrow D]}$. On y interprète le λ-calcul comme suit :

$$\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x) \quad \llbracket M N \rrbracket = i(\llbracket M \rrbracket)(\llbracket N \rrbracket) \quad \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = r(v \mapsto \llbracket M \rrbracket_{\rho[x:=v]})$$

1. Montrer que $\llbracket u \rrbracket = \llbracket v \rrbracket$ quand $u \rightarrow_\beta v$.
2. On dit que D est un réflexif extensionnel quand $r \circ i = \text{id}_D$. Montrer qu'on a alors $\llbracket u \rrbracket = \llbracket v \rrbracket$ quand $u \rightarrow_\eta v$.

Exercice 5 — Modèle de Engeler

On définit un ensemble B d'arbres d'arbres ... d'arbres de A :

$$B_0 = A \quad B_{n+1} = B_n \cup \{(\beta, b) : b \in B_n, \beta \subseteq_{\text{fin}} B_n\} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Le modèle de Engeler est alors donné par le domaine $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, et les fonctions

$$i(x) = y \mapsto \{b : \exists \beta \subseteq_{\text{fin}} y. (\beta, b) \in x\}$$

$$r(f) = \{(\beta, b) \in D : b \in f(\beta)\}$$

1. Calculer $\llbracket \lambda x. x \rrbracket$, $\llbracket \lambda x. \lambda y. x \rrbracket$ et $\llbracket \lambda x. x x \rrbracket$ dans ce modèle.
2. Vérifier qu'on a bien un ordre partiel complet. On pose alors $[D \rightarrow D]$ l'espace des fonctions continues. Vérifier que i et r définissent un réflexif pour ces fonctions.
3. Montrer que ce réflexif n'est pas extensionnel.

Exercice 6 — Espaces de cohérence

Un espace cohérent A est donné par un ensemble $|A|$ (appelé *trame* de l'espace) et une relation binaire réflexive et symétrique \circ_A sur $|A|$. On note $C(A)$ les cliques de A , *i.e.*, les sous-ensembles de $|A|$ qui sont des cliques pour \circ_A . Les cliques finies sont notées $C_{\text{fin}}(A)$.

Étant donné deux espaces de cohérence A_1 et A_2 , leur produit cartésien $A_1 \& A_2$ est l'espace cohérent de trame $A_1 \uplus A_2 = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\})$, et dont la relation de cohérence est définie par

$$(x, i) \circ_{A \& B} (x', j) \text{ ssi } i \neq j \text{ ou } x \circ_{A_i} x'$$

1. On définit l'espace des booléens \mathbb{B} par la trame $\{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$ et la relation de cohérence restreinte à l'identité. Quelles sont ses cliques ? Quelles sont les cliques maximales de $\mathbb{B} \& \mathbb{B}$?

L'intuition : un point est une observation possible, et une clique définit un objet indirectement comme un ensemble d'observations cohérentes.

On se donne quelques autres constructions d'espaces :

- $A \oplus B$ est donné par $|A \oplus B| = |A| \cup |B|$ et $\circ_{A \oplus B} = \circ_A \cup \circ_B$
- $A \Rightarrow B$ est donné par

$$|A \Rightarrow B| = \{(\alpha, b) : \alpha \in C_{\text{fin}}(A), b \in |B|\}$$

$$(\alpha, b) \circ_{A \Rightarrow B} (\alpha', b') \text{ ssi } \begin{cases} \alpha \cup \alpha' \in C(A) \text{ implique } b \circ_B b' \\ \alpha \cup \alpha' \in C(A) \text{ et } \alpha \neq \alpha' \text{ implique } b \neq b' \end{cases}$$

- Si B_i est une suite croissante d'espaces de cohérence (au sens de l'inclusion des trames et des cohérences) sa limite $\lim_i(B_i)$ a pour trame l'union des trames et pour relation de cohérence l'union des relations.

On veut construire un modèle du λ -calcul sur l'espace B_∞ défini comme $\lim_i(B_i)$ pour $B_0 = \mathbb{B}$ et $B_{n+1} = B_n \oplus (B_n \Rightarrow B_n)$.

1. Montrer que $(B_\infty \Rightarrow B_\infty) \subseteq B_\infty$ et que $\bigcirc_{B_\infty \Rightarrow B_\infty} \subseteq \bigcirc_{B_\infty}$.
2. Soit $\gamma \in C(A \Rightarrow B)$. On pose

$$\hat{\gamma} : C(A) \rightarrow C(B), \alpha \mapsto \{b : \exists \alpha' \subseteq \alpha. (\alpha', b) \in \gamma\}$$

Montrer que cette fonction est bien définie et qu'elle est croissante et continue sur les cliques de A .

3. Montrer que $\hat{\gamma}$ est de plus une fonction *stable*, c'est à dire que pour tout $x, x' \in C(A)$ tels que $x \cup x' \in C(A)$ on a $\hat{\gamma}(x) \cap \hat{\gamma}(x') = \hat{\gamma}(x \cap x')$.
4. Soit $f : C(A) \rightarrow C(B)$ continue et stable. On dit que (α, b) est une empreinte de f si $b \in f(\alpha)$ et $b \notin f(\alpha')$ pour tout $\alpha' \subsetneq \alpha$. Montrer que si $b \in f(\alpha)$, alors il existe un unique α_0 tel que (α_0, b) soit une empreinte de f .
5. On définit la trace de f , notée $\text{Tr}(f)$ comme l'ensemble de ses empreintes. Montrer que $\text{Tr}(f) \in C(A \Rightarrow B)$.
6. En déduire une sémantique dénotationnelle des λ -termes. Construire, pour tout u et $\sigma : \text{FV}(u) \rightarrow C(B_\infty)$, l'interprétation $[u]_\sigma \in C(B_\infty)$ tel que pour tout u, v et σ , $[u]_\sigma = [v]_\sigma$ si $u =_\beta v$.

Si l'on interprétait un λ -calcul avec booléens, l'interprétation de la négation est telle que $N(\emptyset) = \emptyset$ et $N(\{b\}) = \{-b\}$; c'est la fonction $\gamma_{\hat{N}}$ pour la clique $\gamma_N = \{(\{\mathbf{tt}\}, \mathbf{ff}), (\{\mathbf{ff}\}, \mathbf{tt})\}$.

La fonction constamment vraie, non stricte, correspond à $V(x) = \{\mathbf{tt}\}$. Dans sa version stricte on a $V'(\emptyset) = \emptyset$, $V'(x) = \{\mathbf{tt}\}$ sinon. Donner l'interprétation de la disjonction paresseuse d'abord sous forme de fonction puis sous forme de clique. Essayer de faire de même pour la disjonction parallèle, qui renvoie vrai dès qu'un de ses argument est vrai.